場合の数の計算を掴むポイント

場合の数の、いろいろなタイプをまず理解しよう

起こりうる事柄の数を計算する

確率について学ぶのに「場合の数」、すなわち順列や組合せの知識が役立つことが多い。起こりうるすべての場合が等しい確率になるという場合に、確率が場合の数と関連してくるからである。

例えば、サイコロを1回投げたときに起こりうるのは、1、2、3、4、5、6という6つの目のうち、どれかが出るということである。したがって、サイコロを1回投げたときの場合の数は、サイコロの目の数と同じで6である。

これくらいのことは、どんなに算数や数学が苦手という人でもおわかりであろう。しかし、2回投げたときの場合の数となると、6×6という計算をしなければならない。投げる回数が3回、4回と増えれば、6を掛け合わせる回数も3回、4回と増えていく。

また、トランプを1枚抜き取るときの場合の数は、やはりトランプ1セットの枚数そのままで、52である。それでは、2枚続けて抜き取るときの場合の数はどうであろうか。トランプの場合は、サイコロと違って、52×51という計算をしなければならない。なぜなら、2枚目を抜き取るときは、トランプ1セットから1枚目の分が除かれているので、51枚の中から1枚を抜き取っているからである。

今の例は、1枚目を抜き取ってから2枚目を抜き取るという順番があるときの計算方法である。これに対して、2枚を同時に抜き取るときのように、順番が考慮されない場合は事情が異なってくる。

例えば、順番を考慮するときは（♥4、♠7）と（♠7、♥4）というのを2通りと数える。しかし、順番を考慮しないときは、これらを1通りと数える。

したがって、2つのものの順番を考慮しないときの場合の数は、順番を考慮するときの$\frac{1}{2}$になるのである。

場合の数にはいろいろな種類がある

このように、「場合の数」と一口に言っても、いろいろなケースがある。そして、それぞれのケースに応じて、計算方法が違ってくるのである。

場合の数の計算でとくに重要なのは、先のトランプの例のように、いくつかのものの中からその一部を抜き取るときの場合の数である。このようなときの場合の数のうち、順序を考慮するものを「順列」といい、順序を考慮しないものを「組合せ」という。

順列と組合せは、さらに条件が加わることによって、いくつかの種類に分けることができる。

例えば、いくつかのものを円環状に並べる場合は、はじめと終わりがないので、1列に並べるときの順列の計算とは別の計算をしなければならない。このような順列を「円順列」という。

また、じゅずの玉を並べる場合のように、円環状に並べるだけでなく、反転させることができる場合を「じゅず順列」といい、円順列の半分の値になる。

そのほかにも、同じものを複数選んでもよい場合の順列や組合せなどが考えられる。これらは、それぞれの場合によって、計算方法が異なる。それぞれの計算方法が導かれる理屈をよく理解し、身の回りのことで、どのケースにはどの計算方法が当てはまるかをよく考えて利用するとよいだろう。

また、樹形図のように視覚的な手段を用いると、場合の数の計算方法がより理解しやすくなることも知っておくとよい。

はじめに述べたように、順列や組合せのような、場合の数の計算は確率について学ぶ上で有効であるが、確率とは関係ないところでも、日常生活からコンピュータ・サイエンスなどの専門的分野にいたるまで、広く応用されている。

登山口から頂上まで行き方は何通り？

あることに関して複数の可能性がある場合、その数を「場合の数」という。それぞれの場合に対してさらに複数の可能性があることもある。

「場合の数」とは何か？

ある山に登るのに、登山口から途中の山小屋まで、次のようなコースがあるとしよう。

コース① 長いけれどもなだらかで、きれいなお花畑がある「花コース」。

コース② 林の中を通って森林浴が楽しめる「森林コース」。

コース③ 険しい岩ばかりであるが、距離は短い「岩コース」。

コース④ ケーブルカーで行く「ケーブルコース」。

この場合、登山口から山小屋までの道は4通りである。

一般に、あることに関して、とりうる選択肢やありうる可能性の数を「場合の数」という。したがって、登山口から途中の山小屋まで行くことに関して、場合の数は4であるということができる。

さらに先にも複数の道がある場合

次に、山小屋から頂上までは次の3通りの道があるとしよう。

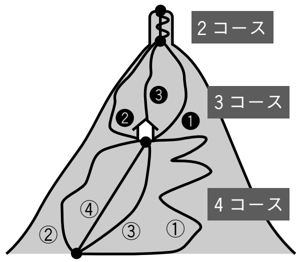
コース❶ 低い高原植物の間を通る「高原コース」。

コース❷ 岩肌に高山植物の花が咲いていてきれいな「高原花コース」。

コース❸ 絶壁ばかりで険しいが距離は短い「絶壁コース」。

さて、登山口から頂上まで行くのに何通りの道があるだろうか？　大前提として、登山口から山小屋までどのような道を通って来ようが、山小屋から頂上までの道は自由に選べることになっている。

いくつの方法（場合）がありうるか？



場合の数＝ある事柄に関する、選択肢や可能性の数

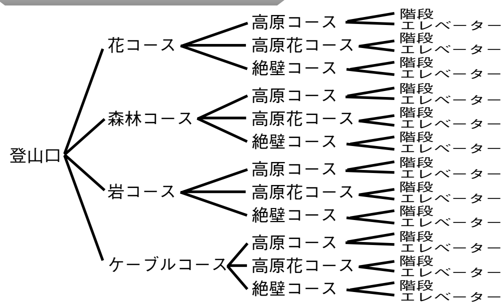
〈登山口から展望台の上への行き方の数〉

(登山口～山小屋)×(山小屋～山頂)×(山頂～展望台の上)

＝4×3×2＝24

積の法則

樹形図で場合の数を求める



4　×　3　×　2　＝24

登山口から山小屋までの4つのコースの一つ一つに対して、山小屋から頂上までの道が3通りある。したがって、4×3＝12通りの道があるという計算ができる。この掛け算は、3台の自動車を作るのに、4×3＝12個のタイヤが必要であるという掛け算の計算と同じである。

さらに、山頂に高い塔が立っていて、この塔のてっぺんに行くには、階段で行く方法と、エレベーターで行く方法の2通りがあるとしよう。すると、登山口から山頂までの12通りのそれぞれに対して、塔のてっぺんまでの行き方が2通りあるので、登山口から塔のてっぺんまでの行き方は全部で4×3×2＝24通りになる。

このように、関連している事柄AとBがあって、Aの起こり方の一つ一つに対して、Bの起こり方がいくつかあるとき、AとBがともに起きるときの場合の数は、それぞれの場合の数を掛けた値になる。これを場合の数の計算における「積の法則」という。

はみだし 積の法則を使うと、ある整数の約数の個数がわかる。例えば、180は$2^2\times3^2\times5^1$であるから、約数は$2^p\times3^q\times5^r$で、pとqには０、１、2、rには０、１が入る。したがって、180の約数は3×3×2＝18個。

◆順列

4つの文字「たけやぶ」の並べ方は何通りあるか？

複数のものを並べるとき、ありうる順序の数を「順列」という。順列の計算には「階乗」という特殊な掛け算を用いる。

文字を並べるときの場合の数

上から読んでも下から読んでも同じになる文を「回文」という。その一例として「たけやぶやけた」というのがよく知られているが、この文の最初の4文字「たけやぶ」を、いろいろに並べ替えてみよう。

たけやぶ　たけぶや　たやけぶ　たやぶけ
たぶけや　たぶやけ　けたやぶ　けたぶや
けやたぶ　けやぶた　けぶたや　けぶやた
やたけぶ　やたぶけ　やけたぶ　やけぶた
やぶたけ　やぶけた　ぶたけや　ぶたやけ
ぶけたや　ぶけやた　ぶやたけ　ぶやけた

この中で、多少意味がありそうなのは「やけぶた」「やぶけた」ぐらいだろうか。何の意味もないものも含めて、24通りあることがわかる。

このように、いくつかのものを並べる方法の数を「順列」という。4つの文字を並べるときの順列の数は、次のようにして求められる。

まず、最初の文字は「た」「け」「や」「ぶ」の4通りがある。その一つ一つに対して、2番目に来る文字は3通りであるから、積の法則により4×3＝12通りになる。さらにそれぞれに対して、3番目に来る文字は2通りある。そして4番目には、自動的に残った1文字が入る。したがって、次のように計算すればよい。

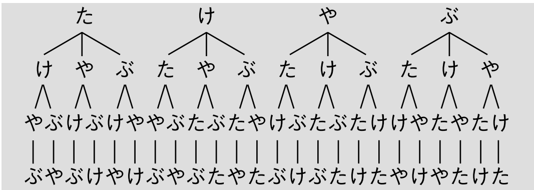
4×3×2×1＝24

これは、1から4までの整数を掛ける計算で、このような計算を「4の階乗」といい、4!と表す。この計算は、樹形図を書いてみるとわかりやすい。

いくつかを選んで並べ替える

並べる方法の数＝順列

「た」「け」「や」「ぶ」を並べ替える

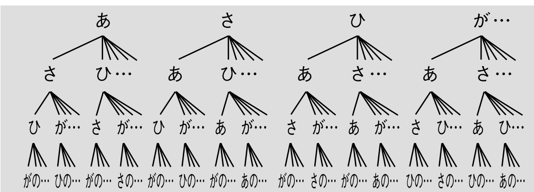


1文字目 4通り
×
2文字目 3通り
×
3文字目 2通り
×
4文字目 1通り
＝
24通り

n個の異なるものを並べるときの順列の数

$${}_nP_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1 = n!$$（nの階乗）

「あ」「さ」「ひ」「が」「の」「ぼ」「る」のうち4文字を並べ替える



1文字目 7通り
×
2文字目 6通り
×
3文字目 5通り
×
4文字目 4通り
＝
840通り

n個の異なるものからr個を選んで並べるときの順列の数

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

それでは、「あさひがのぼる」という7つの異なる文字から4文字だけ選んで並べると、何通りの文字列ができるだろうか。

まず、最初に来る文字は7通りある。その一つ一つに対して、2番目にくる文字は6通りある。それから3番目は5通り、4番目は4通りある。ここで計算を終わらせればよい。

$$7\times6\times5\times4=840$$

この計算式の右辺に3!を掛けると、$7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=7!$になる。逆に、7!を3!で割れば$7\times6\times5\times4$という式が得られる。

一般に、n個の異なるものからr個を選んで並べるときの順列（数学では、これを${}_nP_r$と表す）は、次の式で求められる。

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

はみだし nの階乗$n!$は、$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$で近似できることが知られている。この式を「スターリングの公式」という。

同じ文字が含まれるときの順列はどうなる？

「たけやぶやけた」を全部並べ替える

「たけやぶやけた」の最初の4文字「た」「け」「や」「ぶ」の順列は4!＝4×3×2×1という式で求められた。それでは、残りの3文字も含めた、7文字の順列はどのようにして求められるだろうか。

同じ7文字の並べ替えでも、「あさひがのぼる」のように、7つの文字がすべて異なっていれば、7!＝7×6×5×4×3×2×1という計算で、5040通りとなる。しかし「たけやぶやけた」の場合、「た」「け」「や」の3文字は、全体の7文字の中に2つずつ含まれている。仮に、2つの「た」を「た^{1}」「た^{2}」と区別したとすると、次の2つは別の並び方といえる。

た^{1}けやぶやけた^{2}
た^{2}けやぶやけた^{1}

いくつかのものを並べるとき、その中に同じ種類のものが含まれていて、それらを区別しなければ、順列の値はその分減るはずである。

しかし実際には、「た^{1}」と「た^{2}」には違いがないので、先の2つの並び方を1通りと数えなければならない。つまり、「た^{1}」と「た^{2}」を区別すれば2通りと数えられる並び方を実際には1通りと数えるので、5040通りの半分で2520通りとなる。

同じことは「け」と「や」についてもいえる。「け」も「や」も2個ずつあるから、「け」に関して2520をまた2で割り、「や」に関して2520÷2をさらに2で割らなければならない。結局、5040を2で3回割って630通りというのが答えになる。

同じ文字が3つ以上ある場合

次に、「たけたてかけた」という7文字を並べ替えてみよう。

「たけやぶやけた」は「た」「け」「や」が2つずつで

同種のものを含む順列の求め方

た$_1$け$_1$た$_2$てかけ$_2$た$_3$	た$_1$け$_2$た$_2$てかけ$_1$た$_3$

2つの「け」を区別しなければ、
2！＝2通り分が1通りになる。

た$_1$けた$_2$てかけた$_3$	た$_1$けた$_3$てかけた$_2$	た$_2$けた$_1$てかけた$_3$
た$_2$けた$_3$てかけた$_1$	た$_3$けた$_1$てかけた$_2$	た$_3$けた$_2$てかけた$_1$

さらに3つの「た」を区別しなければ、
3！＝6通り分が1通りになる。

たけたてかけた

…2×6＝12通り分が1通りに

$$「たけたてかけた」を並べ替える方法の数＝\frac{7文字の順列}{2文字の順列×3文字の順列}$$

n個のもののうち、Aと同じものがp個、Bと同じものがq個、Cと同じものがr個ある場合の順列

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

あったが、今度は「け」が2つと「た」が3つある。「け」については、前と同様、2で割ればよい。問題は「た」である。まず、3つの「た」を「た$_1$」「た$_2$」「た$_3$」とすると、「た―け―た―て―か―け―た」という並びには次のような場合がある。

た$_1$けた$_2$てかけた$_3$　た$_1$けた$_3$てかけた$_2$
た$_2$けた$_1$てかけた$_3$　た$_2$けた$_3$てかけた$_1$
た$_3$けた$_1$てかけた$_2$　た$_3$けた$_2$てかけた$_1$

「た」以外の文字を取り除いてみると、結局「た$_1$」「た$_2$」「た$_3$」の3つをどう並べるかということになるので、以上の順列は3!=3×2×1という計算で、6通りと求められる。このような6通りの並び方を1通りと数えるので、「たけたてかけた」という7文字の順列は、7!=5040を2と6で割って、420通りとなる。

以上のように、n個のものがあって、そのうちAと同種のものがp個、Bと同種のものがq個、Cと同種のものがr個ある場合の順列は以下の式で求められる。

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

はみだし 正岡子規（1867～1902）は、俳句や短歌は有限の文字を17文字または31文字並べたもので、しかも使われる言葉が限られているから、明治のうちに滅びるだろうという「俳句・短歌命数論」を主張した。

◆円順列

中華料理店の丸いテーブルの席順は？

いくつかのものを円環状に並べる場合のポイントは、はじまりと終わりがないこと、つまりどこをはじめと考えてもよいことにある。

5人が丸いテーブルに並ぶ方法

佐藤、田中、鈴木、高橋、小林の5人が中華料理店に会食に出かけたとしよう。5人が囲んだのは、中華料理店によくある丸いテーブルであった。このとき、5人の席順は何通りあるだろうか。

図のように描き並べてみると、全部で24通りあるのがわかる。ここで、注意するべきことは、異なる座り方というのは、座席の位置には関係なく、人の関係だけに注目するという点である。

「たけやぶ」という4文字を並べ替えたときは、最初にくる文字と最後にくる文字が切り離されていた。したがって、「たけやぶ」という文字列と「ぶたけや」という文字列は異なった順列である。しかし、丸いテーブルを人が囲む場合は、誰が最初で誰が最後ということは考えられない。

仮に、座席には右回りに1～5の番号がふられていて、座席1から順に鈴木―小林―佐藤―高橋―田中というふうに並んでいるとしよう。そして、この順番を変えないまま、1人ずつ1つ右の席に移動したとすると、座席1から順に田中―鈴木―小林―佐藤―高橋となる。このとき、何番の席に誰が座るかということは変化するが、誰が誰の隣に座っているかという位置関係は変化しない。

したがって、座席の位置を無視して、人の位置に注目するかぎり、以上の2つの並び方は同じ並び方と考えられる。つまり、回転させると重なってしまう並び方は1通りと数えることができるのである。

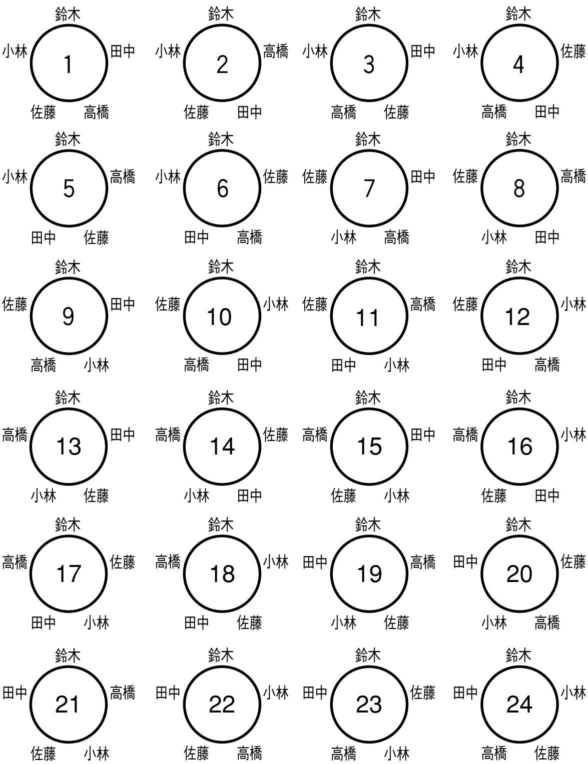
このような円環状の並び方の数を「円順列」という。この円順列はどのようにして求めればよいだろうか。

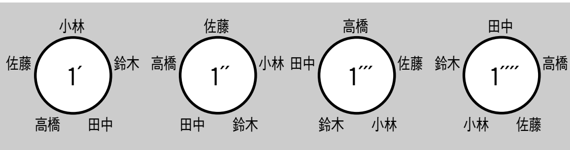
丸いテーブルでの席順は何通り？

回転させたら重なってしまう場合は同じ並び方と考えるのであるから、いっそのこと、誰か1人の席を固定しておき、その隣から4人がどう並ぶかを計算すればよい。すると、4人を並べる方法であるから、次のように計算できる。

$$4!=4\times3\times2\times1=24$$

つまり、n個のものの円順列は、$(n-1)!$という計算で求められる。





上の４つは、回転させると１の並び方になるので、１の並び方と同じものとして数える。

n個のものを円環状に並べるときの順列（円順列）の数

$${}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}=(n-1)!$$

はみだし ８つの席がある丸いテーブルに５人が座る場合の席順の数は、８人の円順列7! ＝5040を３の階乗3! ＝６で割った値840である。これは同じものを含む順列と円順列の組み合わせと考えればよい。